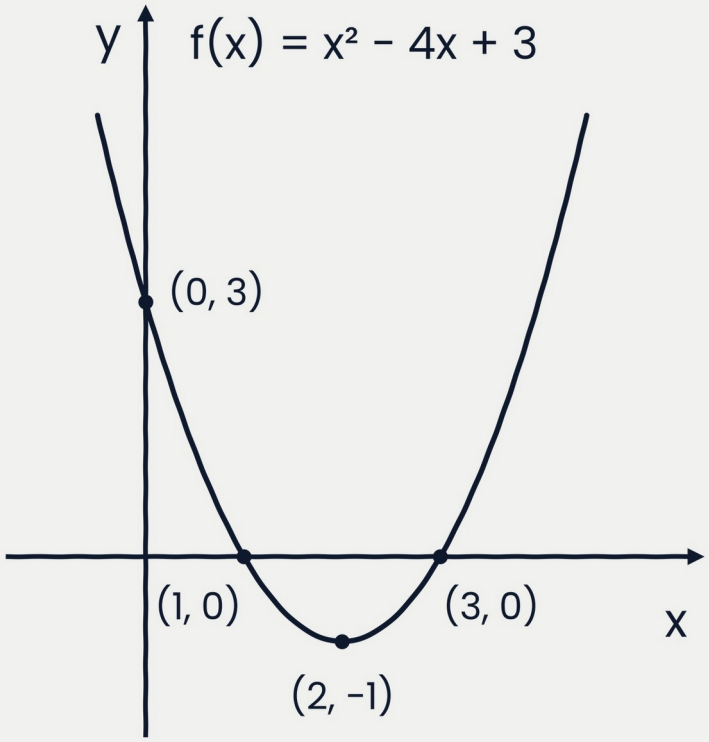
NAUCZ SIĘ SAM
MATEMATYKA
1 KLASA LICEUM
zakres rozszerzony



Małgorzata Zaremba

Matematyka rozszerzona, klasa 1 liceum

Kurs krok po kroku. Rozdziały 1–10

Autorka: Małgorzata Zaremba

Materiał niezależny, niezwiązany z żadnym wydawnictwem i przez nie nieautoryzowany. Treść jest zgodna z podstawą programową dla klasy 1 liceum (zakres rozszerzony). Wszystkie przykłady i zadania są autorskie. Elementy oznaczone gwiazdką (★) należą do zakresu rozszerzonego.

© 2026 Małgorzata Zaremba. Wszelkie prawa zastrzeżone. Autorką e-booka i wszystkich zawartych w nim tekstów, przykładów oraz zadań jest Małgorzata Zaremba. Zabrania się kopiowania, powielania, rozpowszechniania i udostępniania całości lub fragmentów publikacji w jakiejkolwiek formie (drukowanej, elektronicznej, w sieci) bez pisemnej zgody autorki. Zakupiony egzemplarz służy wyłącznie do użytku osobistego nabywcy.

Rozdział 1. Liczby rzeczywiste

Na start: trzy pytania z pamięci

To pierwszy rozdział, więc pytania dotyczą szkoły podstawowej. Odpowiedz bez zaglądania w notatki.

1. Jak zamienić ułamek zwykły na dziesiętny?
2. Ile wynosi 2^3 i ile wynosi sqrt(49)?
3. Jak zaznaczyć liczbę $-1{,}5$ na osi liczbowej?

1.1. Zbiory liczbowe

Konkret. Weźmy kwadrat o boku 1. Jego przekątna d spełnia równanie $d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$. Czy istnieje ułamek p/q, którego kwadrat to dokładnie 2? Okazuje się, że nie. Potrzebujemy więc liczb, które nie są ułamkami.

Obraz. Zbiory liczbowe „wchodzą jedne w drugie”: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Wyobraź sobie koła zagnieżdżone jak matrioszki. Liczby rzeczywiste $\mathbb{R}$ to wszystkie punkty osi liczbowej. Składają się z wymiernych ($\mathbb{Q}$) i niewymiernych.

Symbol.

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ (liczby naturalne; w polskich podręcznikach zero zwykle należy do $\mathbb{N}$, sprawdź konwencję w swoim),
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ (całkowite),
- $\mathbb{Q}$: liczby postaci p/q, gdzie p jest całkowite, a q jest całkowite i różne od 0 (wymierne),
- liczby niewymierne: rzeczywiste, które nie są wymierne,
- rozwinięcie dziesiętne liczby wymiernej jest **skończone albo nieskończone okresowe**; liczby niewymierne mają rozwinięcie nieskończone i nieokresowe.

Przykład 1. Zamień 0,(36) na ułamek zwykły.

1. Niech x = 0,363636...
2. Okres ma 2 cyfry, więc mnożymy przez 100: 100x = 36,363636...
3. Odejmujemy: 100x − x = 36, czyli 99x = 36.
4. x = 36/99 = 4/11.
5. Sprawdzenie: 4 : 11 = 0,3636... ✓

Zadanie bliźniacze Z1. a) Zamień 0,(27) na ułamek zwykły. ★ b) Zamień 0,1(6) na ułamek zwykły (podpowiedź: pomnóż przez 10 i przez 100, potem odejmij).

Przykład 2 (★). Udowodnij, że sqrt(2) jest liczbą niewymierną.

1. Załóżmy nie wprost, że sqrt(2) = p/q, gdzie p, q są całkowite dodatnie, a ułamek jest nieskracalny.
2. Podnosimy do kwadratu: $2 = p^2/q^2$, więc $p^2 = 2q^2$.
3. Zatem p^2 jest parzyste, więc p jest parzyste. Zapisujemy p = 2k.
4. Wtedy $4k^2 = 2q^2$, czyli $q^2 = 2k^2$, więc q również jest parzyste.
5. Obie liczby, p i q, są parzyste, więc ułamek da się skrócić przez 2. To sprzeczność z założeniem. Zatem sqrt(2) jest niewymierna. ∎

> **Pytanie „dlaczego?”.** Dlaczego w tym dowodzie jest tak ważne założenie, że ułamek p/q jest nieskracalny? Co by się stało bez niego?

> **Typowy błąd.** „Suma dwóch liczb niewymiernych jest niewymierna.” To fałsz: sqrt(2) + (−sqrt(2)) = 0, a 0 jest wymierne.

1.2. Potęgi i pierwiastki

Konkret. Pole kwadratu o boku a to a^2. Odwrotnie: znając pole P, bok to sqrt(P). Pierwiastek „cofa” podnoszenie do kwadratu.

Obraz. Narysuj kwadrat o polu 9: jego bok ma 3. Narysuj kwadrat o polu 2: jego bok to sqrt(2), czyli długość przekątnej z poprzedniego działu.

Symbol. Dla a, b > 0 oraz m, n całkowitych:

- a^m · a^n = a^(m+n), a^m : a^n = a^(m-n), (a^m)^n = a^(mn),
- (ab)^n = a^n b^n, a^(-n) = 1/a^n,
- a^(1/n) = root_n(a) oraz a^(m/n) = root_n(a^m),
- sqrt(ab) = sqrt(a) · sqrt(b) oraz sqrt(a/b) = sqrt(a) / sqrt(b),
- **ważne:** sqrt(a^2) = |a| dla każdej liczby rzeczywistej a.

Przykład 3. Oblicz 2^(-3) · 16^(3/4).

1. 16^(3/4) = (16^(1/4))³ = 2³ = 8.
2. 2^(-3) = 1/8.
3. Iloczyn: (1/8) · 8 = 1.

Przykład 4. Usuń niewymierność z mianownika.

- a) 6/sqrt(3) = (6·sqrt(3))/(sqrt(3)·sqrt(3)) = 6·sqrt(3)/3 = 2·sqrt(3).
- b) 1/(sqrt(5) − sqrt(2)): mnożymy licznik i mianownik przez sqrt(5) + sqrt(2) i korzystamy ze wzoru (a − b)(a + b) = a² − b². Wychodzi (sqrt(5) + sqrt(2))/(5 − 2) = (sqrt(5) + sqrt(2))/3.

Przykład 5 (★). Uprość sqrt(7 − 4·sqrt(3)).

1. Szukamy kwadratu różnicy: (2 − sqrt(3))^2 = 4 − 4·sqrt(3) + 3 = 7 − 4·sqrt(3).
2. Zatem sqrt(7 − 4·sqrt(3)) = sqrt((2 − sqrt(3))^2) = |2 − sqrt(3)|.
3. Ponieważ 2 > sqrt(3), mamy |2 − sqrt(3)| = 2 − sqrt(3).

Zadanie bliźniacze Z2. a) Oblicz 3^(-2) · 27^(2/3). b) Usuń niewymierność z mianownika: 4/sqrt(2). ★ c) Uprość sqrt(9 − 4·sqrt(5)).

> **Pytanie „dlaczego?”.** Dlaczego sqrt((−3)^2) = 3, a nie −3? Wyjaśnij to, odwołując się do definicji pierwiastka kwadratowego.

> **Typowy błąd.** sqrt(a^2 + b²) nie jest równe a + b. Sprawdź na liczbach: a = 3, b = 4.

1.3. Wartość bezwzględna

Konkret. Mieszkasz przy ulicy w punkcie 0. Szkoła jest 300 m na wschód, sklep 200 m na zachód. Odległość do szkoły i do sklepu to 300 i 200, niezależnie od kierunku. Wartość bezwzględna mierzy właśnie **odległość**.

Obraz. Na osi liczbowej |x − a| to odległość punktu x od punktu a. Zapis |x − 3| = 5 czytamy: „szukamy punktów oddalonych o 5 od liczby 3”. Narysuj oś, zaznacz 3 i odmierz 5 w obie strony.

Symbol.

- |x| = x, gdy x ≥ 0, oraz |x| = −x, gdy x < 0.
- |x − a| = b (dla b > 0) ⟺ x = a − b lub x = a + b.
- |x − a| < b ⟺ a − b < x < a + b (punkty „blisko” a).
- |x − a| > b ⟺ x < a − b lub x > a + b (punkty „daleko” od a).

Przykład 6. Rozwiąż |x − 3| = 5.

x − 3 = 5 lub x − 3 = −5, więc x = 8 lub x = −2. Na osi: dwa punkty oddalone o 5 od liczby 3. √

Przykład 7. Rozwiąż |2x − 1| ≤ 3.

1. Warunek równoważny: −3 ≤ 2x − 1 ≤ 3.
2. Dodajemy 1: −2 ≤ 2x ≤ 4.
3. Dzielimy przez 2: −1 ≤ x ≤ 2.
4. Odpowiedź: x ∈ ⟨−1, 2⟩.

Przykład 8 (★). Rozwiąż $|x - 1| + |x + 2| = 5$.

Obraz: $|x - 1| + |x + 2|$ to suma odległości punktu x od liczb 1 i -2. Te liczby dzieli odległość 3, więc dla x pomiędzy nimi suma zawsze wynosi 3. Szukamy punktów, w których suma jest równa 5. Podział na przedziały potwierdza to rachunkiem:

1. Dla $x < -2$: $-(x - 1) - (x + 2) = -2x - 1 = 5$, więc $x = -3$. Spełnia warunek $x < -2$. ✓
2. Dla $-2 \le x < 1$: $-(x - 1) + (x + 2) = 3$, a $3 \neq 5$. Brak rozwiązań.
3. Dla $x \ge 1$: $(x - 1) + (x + 2) = 2x + 1 = 5$, więc $x = 2$. Spełnia warunek $x \ge 1$. ✓
4. Odpowiedź: $x \in \{-3, 2\}$.

Zadanie bliźniacze Z3. a) Rozwiąż $|x + 2| = 4$. b) Rozwiąż $|3x + 1| < 5$. ★ c) Rozwiąż $|x - 2| + |x + 1| = 7$.

Pytanie „dlaczego?”. Dlaczego nierówność $|x - a| < b$ nie ma rozwiązań, gdy $b < 0$? Odpowiedz, odwołując się do znaczenia wartości bezwzględnej jako odległości.

Typowe błędy. Równanie $|x| = -2$ nie ma rozwiązań, bo odległość nie bywa ujemna. Prawie zawsze $|a + b|$ jest różne od $|a| + |b|$; ogólnie $|a + b| \le |a| + |b|$ (nierówność trójkąta).

1.4. Przedziały i działania na zbiorach

Konkret. Temperatura w pokoju ma się mieścić od 19 do 23 stopni włącznie. Zbiór dobrych temperatur to przedział $\langle 19, 23 \rangle$.

Obraz. Na osi liczbowej kółko zamalowane oznacza „liczba należy do zbioru” (nawias kwadratowy lub ostry $\langle\ \rangle$), a kółko puste oznacza „nie należy” (nawias okrągły).

Symbol.

- (a, b), $\langle a, b \rangle$, $(a, b \rangle$, $\langle a, b)$ oraz $(a, +\infty)$, $(-\infty, b \rangle$ itd. Przy nieskończoności zawsze nawias okrągły.
- Suma $A \cup B$: elementy należące do A lub do B.

- Iloczyn (część wspólna) $A \cap B$: elementy należące do obu zbiorów.
- Różnica $A \setminus B$: elementy z A, które nie należą do B.

> **Przykład 9.** Dla $A = (-2, 5\rangle$ oraz $B = \langle 1, 7)$ wyznacz $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ i $B \setminus A$.

- $A \cap B = \langle 1, 5\rangle$,
- $A \cup B = (-2, 7)$,
- $A \setminus B = (-2, 1)$ (jedynka należy do B, więc jest wyłączona),
- $B \setminus A = (5, 7)$ (piątka należy do A, więc jest wyłączona).

Zawsze rysuj dwie osie jedna pod drugą. Błędy w nawiasach widać wtedy od razu.

Zadanie bliźniacze Z4. Dla $A = \langle -3, 2)$ oraz $B = (0, 4\rangle$ wyznacz $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ i $B \setminus A$.

> **Pytanie „dlaczego?”.** Dlaczego przy symbolu nieskończoności zawsze piszemy nawias okrągły? Pomyśl, czym jest $+\infty$.

Połączenie z modułem. Nierówność $|x - 1| < 3$ oznacza przedział $(-2, 4)$. To ta sama informacja zapisana dwoma językami.

1.5. Przybliżenia i błędy

Konkret. Kolega mówi, że do szkoły jest 2 km, a naprawdę jest 2,3 km. Drugi kolega mówi, że do Księżyca jest 400 000 km, a naprawdę jest 384 400 km. Który pomylił się bardziej? Różnica jest większa w drugim przypadku, ale czy „bardziej”?

Symbol. Jeśli a to wartość dokładna, a x jest przybliżeniem, to:

- **błąd bezwzględny**: $\Delta = |a - x|$,
- **błąd względny**: $\delta = \Delta / |a|$, często zapisywany w procentach.

> **Przykład 10.** Przybliżamy $\sqrt{2}$ liczbą 1,4. Wtedy $\sqrt{2} \approx 1{,}41421$. Wtedy $\Delta \approx 0{,}01421$, a $\delta = 0{,}01421 / 1{,}41421 \approx 0{,}0100$, czyli około 1%.

Zadanie bliźniacze Z5. Przybliżamy π liczbą 3,14 (przyjmij π ≈ 3,14159). Oblicz błąd bezwzględny i względny w procentach.

> **Pytanie „dlaczego?”.** Dlaczego błąd względny lepiej oddaje jakość przybliżenia niż bezwzględny? Użyj przykładu: pomyłka o 1 cm przy mierzeniu ołówka i przy mierzeniu boiska.

1.6. Logarytmy

Konkret. Bakteria dzieli się na dwie co godzinę. Po ilu godzinach będzie 8 bakterii (z jednej)? Szukamy wykładnika x w równaniu 2^x = 8. Odpowiedź: x = 3.

Obraz. Logarytm odpowiada na pytanie: „do jakiej potęgi podnieść podstawę, żeby dostać daną liczbę?” Strzałka potęgowania idzie w jedną stronę, strzałka logarytmu wraca z powrotem.

Symbol. Dla a > 0, a ≠ 1 oraz b > 0: log_a b = c ⟺ a^c = b. Własności (dla dodatnich liczb logarytmowanych):

- log_a(bc) = log_a b + log_a c,
- log_a(b/c) = log_a b − log_a c,
- log_a(b^n) = n · log_a b,
- log_a a = 1, log_a 1 = 0,
- ★ zamiana podstawy: log_a b = (log_c b) / (log_c a).

Przykład 11. Oblicz.

- a) log_2 8 + log_3 9 = 3 + 2 = 5, bo $2^3 = 8$ oraz $3^2 = 9$.
- b) log_2 12 − log_2 3 = log_2(12/3) = log_2 4 = 2.
- c) ★ log_4 8 = (log_2 8)/(log_2 4) = 3/2.

Zadanie bliźniacze Z6. a) Oblicz log_3 27 + log_5 25. b) Oblicz log_6 12 + log_6 3. ★ c) Oblicz log_8 4.

> **Pytanie „dlaczego?”.** Dlaczego liczba logarytmowana musi być dodatnia? Spróbuj znaleźć x takie, że 2^x = −4.

Typowy błąd. log(a + b) nie jest równe log a + log b. Własność dotyczy iloczynu, nie sumy.

1.7. Podzielność liczb i proste dowody ★

Konkret. Liczby naturalne można sortować według reszty z dzielenia. Przez 3 mamy trzy „szuflady”: reszta 0, 1 lub 2.

Symbol. Każdą liczbę całkowitą n można zapisać jako n = 3k + r, gdzie r ∈ {0, 1, 2}. Podobnie: liczba parzysta to 2k, a nieparzysta to 2k + 1.

Przykład 12. Udowodnij, że kwadrat liczby całkowitej niepodzielnej przez 3 daje przy dzieleniu przez 3 resztę 1.

1. Liczba niepodzielna przez 3 ma postać 3k + 1 albo 3k + 2.
2. $(3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$, reszta 1.
3. $(3k + 2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$, reszta 1.
4. W obu przypadkach reszta wynosi 1. ∎

Zadanie bliźniacze Z7. a) Udowodnij, że suma trzech kolejnych liczb całkowitych jest podzielna przez 3. ★ b) Udowodnij, że iloczyn dwóch kolejnych liczb całkowitych jest parzysty.

Pytanie „dlaczego?”. Dlaczego wystarczy sprawdzić tylko reszty 1 i 2, a nie wszystkie liczby całkowite?

Zestaw mieszany

Zadania z całego rozdziału w losowej kolejności. Nie podpowiadamy, z którego działu pochodzi zadanie, bo rozpoznanie typu zadania to część umiejętności.

1. Zamień 0,(45) na ułamek zwykły.
2. Oblicz 8^(2/3) · 2^(-4).
3. Usuń niewymierność z mianownika: 10/(sqrt(7) − sqrt(2)).
4. ★ Rozwiąż równanie |2x − 4| = |x + 1|.

5. Zapisz zbiór rozwiązań nierówności $|x + 1| \geq 2$ w postaci sumy przedziałów.
6. Oblicz $\log_2 40 - \log_2 5$.
7. ★ Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej n liczba $n^3 - n$ jest podzielna przez 3 (podpowiedź: rozłóż na czynniki).

Mini-quiz samokontroli

Odpowiedz „tak” lub „nie” i uzasadnij jednym zdaniem.

1. Czy suma dwóch liczb niewymiernych jest zawsze niewymierna?
2. Czy $\sqrt{(-5)^2} = -5$?
3. Czy $|a + b| = |a| + |b|$ dla dowolnych a, b?
4. Czy $\log_2(-4)$ istnieje?
5. Czy kwadrat liczby całkowitej może dawać przy dzieleniu przez 3 resztę 2?

Zadania dodatkowe

Zadania 1–10 są podstawowe, 11–18 średnie, a 19–25 (★) trudniejsze, na poziomie rozszerzonym. Rozwiązania krok po kroku są w części „Odpowiedzi i wskazówki”.

1. Zamień na ułamek nieskracalny: a) 0,75 b) 0,(8) c) 2,(6).
2. Wskaż zbiory ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$), do których należy liczba: a) $-\sqrt{64}$ b) $6/3$ c) $\sqrt{27}$ d) 0,1010010001… (kolejne grupy zer są coraz dłuższe).
3. Oblicz: a) $2^5 \cdot 2^{-2}$ b) $(3^2)^3 / 3^4$ c) 5^{-2} d) $49^{1/2}$.
4. Uprość: a) $\sqrt{50}$ b) $\sqrt{18} + \sqrt{2}$ c) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$.
5. Oblicz: a) $|-7| + |3 - 8|$ b) $|\sqrt{2} - 3|$.
6. Rozwiąż równanie: a) $|x| = 9$ b) $|x - 4| = 2$ c) $|2x + 3| = 5$.

7. Rozwiąż nierówność i zapisz wynik przedziałem: a) $|x| \le 3$ b) $|x - 1| > 2$.

8. Dla $A = (-1, 4\rangle$ i $B = \langle 2, 6)$ wyznacz $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ oraz $B \setminus A$.

9. Oblicz: a) $\log_2 32$ b) $\log_5 (1/5)$ c) $\log_9 3$ d) $\log_7 1$.

10. Zaokrąglij $\sqrt{10}$ do 0,1 i oblicz błąd bezwzględny (przyjmij $\sqrt{10} \approx 3{,}16228$).

11. Zamień na ułamek nieskracalny: a) $0{,}2(3)$ b) $1{,}(24)$.

12. Bez dzielenia rozstrzygnij, które ułamki mają rozwinięcie skończone: $7/40$, $5/18$, $13/65$, $9/28$.

13. Oblicz: a) $8^{2/3} \cdot 4^{-1/2}$ b) $(27/8)^{-1/3}$ c) $2^{-1} + 4^{-1}$.

14. Usuń niewymierność z mianownika: a) $12 / \sqrt{6}$ b) $3 / (\sqrt{7} - 2)$ c) $(\sqrt{3} + 1) / (\sqrt{3} - 1)$.

15. Rozwiąż: a) $|3x - 6| = 9$ b) $|x + 4| < 7$ c) $|2x - 5| \ge 1$.

16. Dla $A = \langle -5, 1)$ i $B = (-2, 3\rangle$ wyznacz $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

17. Oblicz: a) $\log_2 12 + \log_2 (2/3)$ b) $\log_3 135 - \log_3 5$ c) $2 \cdot \log_5 15 - 2 \cdot \log_5 3$.

18. Rozwiąż: a) $3^x = 1/27$ b) $\log_4 x = 3/2$ c) $2^{x+1} = 32$.

19. ★ Udowodnij, że $\sqrt{5}$ jest liczbą niewymierną.

20. ★ Uprość $\sqrt{12 - 6 \cdot \sqrt{3}}$.

21. ★ Rozwiąż równanie $|x + 3| + |x - 1| = 6$.

22. ★ Rozwiąż nierówność $|x - 2| < |x + 4|$.

23. ★ Udowodnij, że $\log_2 3$ jest liczbą niewymierną.

24. ★ Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej n liczba $n^2 + n + 2$ jest parzysta.

25. ★ Udowodnij, że kwadrat liczby nieparzystej daje przy dzieleniu przez 8 resztę 1.

Plan powtórek

Plan długoterminowy. Jeśli sprawdzian jest za tydzień, skróć go: powtórka po 1 dniu i po 3–4 dniach.

- **Dzień 1 (dzień po nauce):** odpowiedz z pamięci na pytania „dlaczego?” i rozwiąż mini-quiz bez zaglądania w notatki.
- **Dzień 7:** rozwiąż zestaw mieszany od nowa, a zadania, które sprawiły kłopot, rozwiąż jeszcze raz następnego dnia.
- **Dzień 30:** wybierz po jednym zadaniu z każdego działu i rozwiąż je bez żadnych materiałów. Zanotuj, co umiesz, a co wraca do planu na kolejny tydzień.

Odpowiedzi i wskazówki

Najpierw spróbuj rozwiązać zadanie samodzielnie, dopiero potem sprawdzaj. Rozwiązania są rozpisane krok po kroku. Jeśli Twoja droga jest inna, a wynik ten sam, to też dobrze.

Zadania bliźniacze

1. Z1. a) Niech x = 0,2727… Okres ma 2 cyfry, więc 100x = 27,2727… Odejmujemy: 100x − x = 27, czyli 99x = 27, stąd x = 27/99 = 3/11. ★ b) x = 0,1666…; 10x = 1,666…; 100x = 16,666…. Odejmujemy: 100x − 10x = 15, czyli 90x = 15, stąd x = 1/6.
2. Z2. a) 3^(−2) = 1/9, a 27^(2/3) = (27^(1/3))^2 = 3^2 = 9. Iloczyn: 1/9 · 9 = 1. b) Mnożymy licznik i mianownik przez sqrt(2): 4/sqrt(2) = 4·sqrt(2)/2 = 2·sqrt(2). ★ c) Sprawdzamy kwadrat różnicy: (sqrt(5) − 2)^2 = 5 − 4·sqrt(5) + 4 = 9 − 4·sqrt(5). Zatem sqrt(9 − 4·sqrt(5)) = |sqrt(5) − 2| = sqrt(5) − 2, bo sqrt(5) > 2.
3. Z3. a) x + 2 = 4 lub x + 2 = −4, czyli x = 2 lub x = −6. b) |3x + 1| < 5 oznacza −5 < 3x + 1 < 5. Odejmujemy 1: −6 < 3x < 4. Dzielimy przez 3: −2 < x < 4/3, czyli x ∈ (−2, 4/3). ★ c) Punkty zmiany znaku: −1 i 2. Dla x < −1: −(x − 2) − (x + 1) = 1 − 2x = 7, więc x = −3 (należy do przedziału). Dla −1 ≤ x <

2: (2 − x) + (x + 1) = 3 ≠ 7, brak rozwiązań. Dla x ≥ 2: (x − 2) + (x + 1) = 2x − 1 = 7, więc x = 4 (należy). Odpowiedź: x ∈ {−3, 4}.

4. Z4. Rysujemy dwie osie jedna pod drugą. A ∩ B = (0, 2): to liczby z obu zbiorów, przy czym 0 nie należy do B, a 2 nie należy do A. A ∪ B = ⟨−3, 4⟩. A \ B = ⟨−3, 0⟩ (liczba 0 nie jest w B, więc zostaje). B \ A = ⟨2, 4⟩ (liczba 2 nie jest w A, więc zostaje).
5. Z5. Błąd bezwzględny: Δ = |3,14159 − 3,14| = 0,00159. Błąd względny: δ = Δ / π ≈ 0,00159 / 3,14159 ≈ 0,000506, czyli około 0,05%.
6. Z6. a) log_3 27 = 3, bo 3^3 = 27; log_5 25 = 2, bo 5^2 = 25. Suma: 5. b) log_6 12 + log_6 3 = log_6 (12 · 3) = log_6 36 = 2. ★ c) Zamiana podstawy na 2: log_8 4 = (log_2 4) / (log_2 8) = 2/3.
7. Z7. a) Trzy kolejne liczby całkowite: n − 1, n, n + 1. Suma: (n − 1) + n + (n + 1) = 3n, czyli jest podzielna przez 3. ★ b) Rozważamy n(n + 1). Jeśli n jest parzyste, iloczyn jest parzysty. Jeśli n jest nieparzyste, to n + 1 jest parzyste, więc iloczyn też jest parzysty.

Zestaw mieszany

1. x = 0,4545…; 100x = 45,4545…; odejmujemy: 99x = 45, stąd x = 45/99 = 5/11.
2. 8^(2/3) = (8^(1/3))^2 = 2^2 = 4, a 2^(−4) = 1/16. Iloczyn: 4/16 = 1/4.
3. Mnożymy licznik i mianownik przez sprzężenie (sqrt(7) + sqrt(2)): 10·(sqrt(7) + sqrt(2)) / ((sqrt(7))^2 − (sqrt(2))^2) = 10·(sqrt(7) + sqrt(2)) / 5 = 2·(sqrt(7) + sqrt(2)).
4. ★ Z równości modułów: 2x − 4 = x + 1 lub 2x − 4 = −(x + 1). Z pierwszego x = 5. Z drugiego 2x − 4 = −x − 1, czyli 3x = 3, więc x = 1. Sprawdzenie: dla x = 5 mamy |6| = |6|, dla x = 1 mamy |−2| = |2|. Odpowiedź: x ∈ {1, 5}.

5. |x + 1| ≥ 2 oznacza x + 1 ≥ 2 lub x + 1 ≤ −2, czyli x ≥ 1 lub x ≤ −3. Zapis: x ∈ (−∞, −3⟩ ∪ ⟨1, +∞).
6. log_2 40 − log_2 5 = log_2 (40/5) = log_2 8 = 3.
7. ★ n^3 − n = n(n^2 − 1) = (n − 1) · n · (n + 1). To iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych, a wśród nich zawsze jest jedna podzielna przez 3. Zatem cały iloczyn jest podzielny przez 3.

Mini-quiz

1. Nie. Przykład: sqrt(2) + (−sqrt(2)) = 0, a 0 jest liczbą wymierną.
2. Nie. sqrt(a^2) = |a|, więc sqrt((−5)^2) = sqrt(25) = 5.
3. Nie. Dla a = 3, b = −3 mamy |a + b| = 0, a |a| + |b| = 6. Równość zachodzi tylko wtedy, gdy a i b mają ten sam znak lub któraś z nich jest zerem.
4. Nie. Równanie 2^c = −4 nie ma rozwiązania, bo 2^c jest zawsze dodatnie, więc liczba logarytmowana musi być dodatnia.
5. Nie. Dla n = 3k kwadrat to 9k^2 (reszta 0). Dla n = 3k + 1: 9k^2 + 6k + 1 (reszta 1). Dla n = 3k + 2: 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1 (reszta 1). Reszta jest zawsze 0 lub 1.

Zadania dodatkowe

1. a) 0,75 = 75/100 = 3/4. b) x = 0,888…; 10x = 8,888…; 9x = 8, stąd x = 8/9. c) x = 2,666…; 10x = 26,666…; 9x = 24, stąd x = 24/9 = 8/3.
2. a) −sqrt(64) = −8: należy do ℤ, ℚ, ℝ. b) 6/3 = 2: należy do ℕ, ℤ, ℚ, ℝ. c) sqrt(27) = 3·sqrt(3) jest niewymierna: tylko ℝ. d) Rozwinięcie jest nieskończone i nieokresowe, więc liczba jest niewymierna: tylko ℝ.
3. a) 2^(5 + (−2)) = 2^3 = 8. b) (3^2)^3 = 3^6, więc 3^6 / 3^4 = 3^2 = 9. c) 5^(−2) = 1/5^2 = 1/25. d) 49^(1/2) = sqrt(49) = 7.

4. a) sqrt(50) = sqrt(25 · 2) = 5·sqrt(2). b) sqrt(18) = 3·sqrt(2), więc 3·sqrt(2) + sqrt(2) = 4·sqrt(2). c) sqrt(3) · sqrt(12) = sqrt(36) = 6.

5. a) |−7| = 7 i |3 − 8| = |−5| = 5, razem 12. b) sqrt(2) ≈ 1,41 < 3, więc różnica jest ujemna: |sqrt(2) − 3| = 3 − sqrt(2).

6. a) x = 9 lub x = −9. b) x − 4 = 2 lub x − 4 = −2, czyli x = 6 lub x = 2. c) 2x + 3 = 5 daje x = 1, a 2x + 3 = −5 daje x = −4.

7. a) −3 ≤ x ≤ 3, czyli ⟨−3, 3⟩. b) x − 1 > 2, czyli x > 3, albo x − 1 < −2, czyli x < −1. Zapis: (−∞, −1) ∪ (3, +∞).

8. A ∪ B = (−1, 6). A ∩ B = ⟨2, 4⟩. A \ B = (−1, 2). B \ A = (4,

9. a) 2^5 = 32, więc 5. b) 5^(−1) = 1/5, więc −1. c) 9^(1/2) = 3, więc 1/2. d) 7^0 = 1, więc 0.

10. Zaokrąglenie do 0,1: sqrt(10) ≈ 3,2. Błąd bezwzględny: |3,16228 − 3,2| ≈ 0,03772.

11. a) x = 0,2333…; 10x = 2,333…; 100x = 23,333…; 100x − 10x = 21, czyli 90x = 21, stąd x = 21/90 = 7/30. b) x = 1,2424…; 100x = 124,2424…; 99x = 123, stąd x = 123/99 = 41/33.

12. Skracamy ułamek i patrzymy na mianownik. 7/40: 40 = 2^3 · 5, rozwinięcie skończone. 5/18: 18 = 2 · 3^2, jest dzielnik 3, więc okresowe. 13/65 = 1/5, skończone. 9/28: 28 = 2^2 · 7, jest dzielnik 7, więc okresowe.

13. a) 8^(2/3) = 4, a 4^(−1/2) = 1/sqrt(4) = 1/2. Iloczyn: 2. b) (27/8)^(−1/3) = (8/27)^(1/3) = 2/3. c) 1/2 + 1/4 = 3/4.

14. a) 12/sqrt(6) = 12·sqrt(6)/6 = 2·sqrt(6). b) Mnożymy przez sprzężenie (sqrt(7) + 2): 3·(sqrt(7) + 2) / (7 − 4) = sqrt(7) + 2. c) Mnożymy przez (sqrt(3) + 1): (sqrt(3) + 1)^2 / (3 − 1) = (3 + 2·sqrt(3) + 1) / 2 = 2 + sqrt(3).

15. a) 3x − 6 = 9 daje x = 5, a 3x − 6 = −9 daje x = −1. b) −7 < x + 4 < 7, więc −11 < x < 3, czyli (−11, 3). c) 2x − 5 ≥ 1 daje x ≥ 3, a 2x − 5 ≤ −1 daje x ≤ 2. Zapis: (−∞, 2⟩ ∪ ⟨3, +∞).

16. $A \cup B = \langle -5, 3\rangle$, $A \cap B = (-2, 1)$. Po odjęciu zostają końce: $\langle -5, -2\rangle \cup \langle 1, 3\rangle$.

17. a) log_2 12 + log_2 (2/3) = log_2 (12 · 2/3) = log_2 8 = 3. b) log_3 135 − log_3 5 = log_3 27 = 3. c) 2·log_5 15 − 2·log_5 3 = 2·log_5 (15/3) = 2·log_5 5 = 2.

18. a) 3^x = 3^(−3), więc x = −3. b) x = 4^(3/2) = (sqrt(4))^3 = 8. c) 2^(x+1) = 2^5, więc x + 1 = 5 i x = 4.

19. ★ Załóżmy, że sqrt(5) = p/q, gdzie ułamek jest nieskracalny. Wtedy p^2 = 5q^2, więc 5 dzieli p^2, a ponieważ 5 jest liczbą pierwszą, 5 dzieli p. Niech p = 5k. Wtedy 25k^2 = 5q^2, czyli q^2 = 5k^2, więc 5 dzieli q. Obie liczby dzielą się przez 5, co przeczy nieskracalności. Zatem sqrt(5) jest niewymierne.

20. ★ (3 − sqrt(3))^2 = 9 − 6·sqrt(3) + 3 = 12 − 6·sqrt(3). Zatem sqrt(12 − 6·sqrt(3)) = |3 − sqrt(3)| = 3 − sqrt(3), bo 3 > sqrt(3).

21. ★ Punkty zmiany znaku: −3 i 1. Dla $x < -3$: $-(x + 3) - (x - 1) = -2x - 2 = 6$, więc $x = -4$ (należy). Dla $-3 \le x < 1$: $(x + 3) - (x - 1) = 4 \neq 6$, brak rozwiązań. Dla $x \ge 1$: $(x + 3) + (x - 1) = 2x + 2 = 6$, więc $x = 2$ (należy). Odpowiedź: $x \in \{-4, 2\}$.

22. ★ Obie strony są nieujemne, więc możemy podnieść do kwadratu: $(x - 2)^2 < (x + 4)^2$. Stąd $x^2 - 4x + 4 < x^2 + 8x + 16$, czyli $-12 < 12x$ i $x > -1$. Sens: szukamy liczb bliższych 2 niż −4, a środek odcinka od −4 do 2 to −1. Odpowiedź: $x \in (-1, +\infty)$.

23. ★ Załóżmy, że log_2 3 = p/q dla dodatnich całkowitych p, q. Wtedy 2^(p/q) = 3, więc 2^p = 3^q. Lewa strona jest parzysta, a prawa nieparzysta (potęga liczby nieparzystej). Sprzeczność, więc log_2 3 jest niewymierny.

24. ★ $n^2 + n + 2 = n(n + 1) + 2$. Iloczyn dwóch kolejnych liczb całkowitych jest parzysty, bo jedna z nich jest parzysta. Dodanie 2 nie zmienia parzystości, więc liczba jest parzysta.

25. ★ Niech n = 2k + 1. Wtedy n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k + 1) + 1. Iloczyn k(k + 1) jest parzysty, czyli k(k + 1) = 2m, więc n^2 = 8m + 1. Reszta z dzielenia przez 8 wynosi 1.